Proyecto MaTEX

Sistemas Lineales

Fco Javier González Ortiz

Directorio

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4

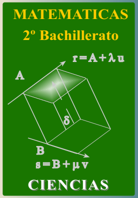

Tabla de Contenido

1. Ecuaciones lineales

Definición 1.1 *Una ecuación lineal, con n incógnitas, es una expresión del tipo*

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = b$$

donde las incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ están sometidas a operaciones de suma y producto por números.

No son lineales por ejemplo las ecuaciones:

$$x^2 - y + 5 = 0 \qquad \sqrt{x} + 2y = 1 \qquad \ln x + 2 = y$$

Un sistema lineal es aquel que consta únicamente de ecuaciones lineales, como por ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ & & y & - & 17z & = & -33 \\ & & 20y & - & 19z & = & -18 \end{array}$$

o por ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & t & = & 34 \\ 2x & + & y & + & z & - & 2t & = & 5 \end{array}$$

El problema central del álgebra lineal es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.1 *Un sistema de m ecuaciones lineales con n incoógnitas se escribe de forma genérica como:*

$$(S) \equiv \left.\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & = & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

A toda $n-$tupla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que cumpla las ecuaciones de (S) se le llama solución del sistema.

Los sistemas más fáciles de resolver son los sistemas triangulares.

Ejemplo 2.1. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \\ & & & & 4z & = & 4 \end{array}\right\}$$

Solución:
Primero hallamos z en la tercera ecuación, $z = 1$.
Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos, $y = 2$; y sustituyendo la primera ecuación da $x = -1$. A este mecanismo lo llamamos sustitución hacia atrás. $\square$

Ejemplo 2.2. Obtener un sistema triangular a partir del sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & & & = & -2 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{array}\right\}$$

- Restamos de la segunda ecuación, la primera multiplicada por 2, y sumamos a la tercera ecuación, la primera. Obtenemos así un sistema equivalente al anterior:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & 3y & + & 2z & = & 8 \end{array}\right\}$$

  Ahora, con la segunda y tercera ecuación eliminamos y,

- Sumamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por 3:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & & - & 4z & = & -4 \end{array}\right\}$$

La solución como antes es, $z = 1$, $y = 2$ y $x = -1$. Al proceso seguido se le llama **eliminación gaussiana** o método de Gauss . Cuando el sistema tiene solución decimos que es **compatible**.

2.1. Sistemas equivalentes

Definición 2.2 *Dos sistemas con las mismas incógnitas y con la misma solución se llaman equivalentes. Por ejemplo*

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 9 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 9 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}\right\}$$

son equivalentes pues tienen la misma solución $x = 3 \qquad y = 0$.

2.2. Transformación de sistemas

¿Qué tipo de transformaciones podemos realizar en un sistema para que siga siendo equivalente?. Como vimos en el ejemplo inicial, resuelto por eliminación gaussiana, tres cosas podemos realizar en un sistema para conseguir otro equivalente:

- ☞Intercambiar de posición dos ecuaciones entre si.
- ☞Multiplicar una ecuación por un número.
- ☞Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

Ejemplo 2.3. Resolver por eliminación gaussiana el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ 5x & - & 3y & + & z & = & -6 \\ 4x & + & 4y & - & z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Solución: El primer paso es multiplicar la segunda ecuación o fila por 3 y restarle la primera por 5, lo abreviaremos como $3f_2 - 5f_1$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ 5x & - & 3y & + & z & = & -6 \\ 4x & + & 4y & - & z & = & -2 \end{array}\right\} \stackrel{3f_2-5f_1}{\equiv} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ & & y & - & 17z & = & -33 \\ 4x & + & 4y & - & z & = & -2 \end{array}\right\}$$

después restamos a la tercera multiplicada por 3 la primera multiplicada por 4:

$$\stackrel{3f_3-4f_1}{\equiv} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ & & y & - & 17z & = & -33 \\ & & 20y & - & 19z & = & -18 \end{array}\right\}$$

y por último, restamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por 20:

$$\stackrel{f_3-20f_2}{\equiv} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ & & y & - & 17z & = & -33 \\ & & & & 321z & = & 642 \end{array}\right\}$$

Ahora por sustitución hacia atrás se obtiene, $z = 2$; $y = 1$ y $x = -1$.
Cuando un sistema tiene una única solución diremos que es Compatible Determinado.

□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 2.4. Resolver por el método de Gauss el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ 6x & + & y & - & 2z & = & 7 \end{array}\right\}$$

Solución:
En un primer paso eliminamos x en la 2ª y 3ª ecuación con, $3f_2 - f_1$ y $f_3 - 2\,f_1$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ 6x & + & y & - & 2z & = & 7 \end{array}\right\} \xrightarrow[f_3-2f_1]{3f_2-f_1} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 4z & = & 5 \\ & & 5y & - & 4z & = & 5 \end{array}\right\}$$

y por último, restamos a la tercera ecuación la segunda

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 4z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} y = 1 + \dfrac{4}{5}z \\ x = 1 + \dfrac{1}{5}z \end{array}$$

Resulta que la última ecuación es linealmente dependiente de las otras.
Hay infinitas soluciones según demos valores a la variable libre z.
Cuando un sistema tiene infinitas soluciones diremos que es Compatible Indeterminado.

□

Ejemplo 2.5. Resolver por el método de Gauss el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ 6x & + & y & - & 2z & = & 7 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ 6x & + & y & - & 2z & = & 10 \end{array}\right\} \xrightarrow[f_3-2\,f_1]{3f_2-f_1} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 4z & = & 5 \\ & & 5y & - & 4z & = & 7 \end{array}\right\}$$

y por último, restamos a la tercera ecuación la segunda

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 4z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Resulta que la última ecuación es absurdo.
El sistema inicial es equivalente a un sistema que no tiene solución.
Cuando un sistema no tiene solución, diremos que es **Incompatible.** □

2.3. Clasificación de los sistemas

De los tres ejemplos vistos anteriormente según un sistema tenga solución única o infinitas o bien no tenga solución podemos establecer la siguiente clasificación:

$$\text{Sistema}\begin{cases}\text{Compatible} & \begin{cases}\text{Determinado} \\ \textit{(Solución única)} \\ \\ \text{Indeterminado} \\ \textit{(Infinitas soluciones)}\end{cases} \\ \\ \text{Incompatible} & \quad \textit{No tiene solución}\end{cases}$$

3. Método de Gauss Reducido

El método de eliminación que hemos aprendido se realiza de forma esquemática omitiendo las incógnitas y fijándonos únicamente en los coeficientes y los términos independientes del sistema.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ 5x & - & 3y & + & z & = & -6 \\ 4x & + & 4y & - & z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Omitimos las incógnitas y almacenamos en dos cajas-matrices los coeficientes junto con los términos independientes.

Designamos a la matriz de los coeficientes como A y a la matriz de los coeficientes junto con los términos independientes la matriz ampliada AM.

$$\underbrace{\left(\overbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{matrix}}^{A} \quad \begin{matrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{matrix}\right)}_{AM}$$

Para su discusión y resolución realizamos como anteriormente las transformaciones elementales pertinentes para triangular el sistema. La única diferencia es que no escribimos las incógnitas.

$$\xrightarrow{3f_3-4f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -17 & -33 \\ 4 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{3f_2-5f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -17 & -33 \\ 0 & 20 & -19 & -18 \end{array}\right)$$

A continuación restando a la f_3 la f_2 por 20 obtenemos la matriz de los coeficientes de forma triangular

$$\xrightarrow{f_3-20\,f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -17 & -33 \\ 0 & 0 & 321 & 642 \end{array}\right)$$

El nuevo sistema se resuelve por sustitución hacia atrás:

$$321\,z = 642 \Rightarrow z = 2 \qquad \text{entrando en la } f_2$$

$$y - 17\,(2) = -33 \Rightarrow y = 1 \qquad \text{entrando en la } f_1$$

$$3\,x - 2\,(1) + 4\,(2) = 3 \Rightarrow x = -1$$

Ejercicio 1. Resolver por el método de Gauss reducido el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ 2x + 3y - 5z & = & 0 \\ 3x - y + 2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 3.1. Resolver por el método de Gauss reducido el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & z & = & 11 \\ 3x & & & + & 2z & = & 17 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-3f_1]{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

La última ecuación se reduce a $0 = 2$, que es absurdo luego el sistema es incompatible y no tiene solución. □

Ejercicio 2. Resolver por el método de Gauss reducido el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x + 3y + 4z & = & 9 \\ -4x + y & = & 1 \\ 3x + y + 2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

3.1. Ecuaciones dependientes

Cuando en el proceso de reducción-eliminación nos encontramos con una fila de ceros, corresponde a una ecuación que es dependiente de las otras.

Ejemplo 3.2. Resolver por el método de Gauss el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & - & 7z & = & 9 \\ 5x & + & 5y & - & 16z & = & 16 \\ 2x & + & 3y & + & 5z & = & -7 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\xrightarrow[f_4-2f_1]{\substack{f_2-3f_1 \\ f_3-5f_1}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -13 & 3 \\ 0 & 10 & -26 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4-f_2]{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right)$$

Observese que la tercera fila-ecuación se reduce a la identidad $0 = 0$. Decimos que la tercera ecuación es linealmente dependiente de las otras ecuaciones. El nuevo sistema triangular se resuelve por sustitución hacia atrás:

$$14\,z = -14 \Rightarrow \boxed{z = -1} \qquad \text{entrando en la } f_2$$

$$5\,y - 13\,(-1) = 3 \Rightarrow \boxed{y = -2} \qquad \text{entrando en la } f_1$$

$$x - (-2) + 2(-1) = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

□

Ejemplo 3.3. Comprobar que en el siguiente sistema hay dos ecuaciones dependientes

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & - & y & + & 2z = & 2 \\ x & & & + & z = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z = & 4 \\ & & y & - & z = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2-f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2-f_2]{f_3+f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hay dos ecuaciones dependientes. El sistema se reduce a las dos primeras. Es compatible indeterminado. Expresamos las soluciones de x e y en función de z.

$$y - z = 0 \Rightarrow \boxed{y = z} \qquad \text{entrando en la } f_2$$

$$x - y + 2z = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2 - z}$$

□

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS

MaTEX

SISTEMAS LINEALES

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

3.2. Solución parametrizada de un sistema

Cuando un sistema es compatible indeterminado es decir tiene infinitas soluciones podemos elegir incógnitas que toman valores libres y expresar las incógnitas principales en función de estas incógnitas libres o secundarias.

A las incógnitas libres tambien les llamamos parámetros.

Por ejemplo la ecuación $x+y=2$ tiene infinitas soluciones. Si despejamos x en función de y las soluciones se pueden obtener de la expresión

$$x = 2 - y$$

dando valores a y. Si expresamos y como un valor que puede ser arbitarrio λ

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2 - \lambda \\ y & = & \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in R$$

Podemos dar valores a λ y obtenemos sucesivas soluciones, como por ejemplo

$$\begin{array}{lll} \lambda = 0 \Longrightarrow & x = 2 & y = 0 \\ \lambda = 1 \Longrightarrow & x = 1 & y = 1 \\ \lambda = 2 \Longrightarrow & x = 0 & y = 2 \cdots \end{array}$$

Hay tantas incógnitas principales como ecuaciones, las demás pasan a ser secundarias o parámetros, y pasan junto con el término independiente.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.4. Expresar la solución del sistema en forma parametrizada.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Solución:
El sistema ya tiene forma reducida o triangular. Es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.
Para expresar todas las soluciones, elegimos x e y como incógnitas principales y pasamos a z al término independiente como incógnita secundaria o libre.

$$\left.\begin{array}{cccccc} x & - & y & = & 2 & -z \\ & & y & = & 5 & -z \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 5 - z} \qquad x - (5 - z) + z = 2 \Rightarrow \boxed{x = 7 - 2z}$$

Quedando las soluciones expresadas de la forma

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 7 - 2z \\ y & = & 5 - z \end{array}\right.$$

O también, para indicar que z toma libremente cualquier valor lo expresamos como un parámetro λ, quedando la solución en forma parametrizada

$$\left\{\begin{array}{ccr} x & = & 7 - 2\,\lambda \\ y & = & 5 - \lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in R$$

□

MATEMATICAS 2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
Sistemas Lineales
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.5. Resolver el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 6x & + & y & - & 2z & = & 7 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-6f_1]{f_2-3f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.
Para expresar todas las soluciones, elegimos x e y como incógnitas principales y pasamos z al término independiente como incógnita secundaria o libre.

$$-5\,y = -5 - 4\,z \Rightarrow \boxed{y = 1 + \frac{4}{5}z} \qquad \text{entrando en la } f_1$$

$$x + (1 + \frac{4}{5}z) - z = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1 + \frac{1}{5}z}$$

y en forma parametrizada $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 + \dfrac{1}{5}\lambda \\ y & = & 1 + \dfrac{4}{5}\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$ □

Inicio del Test Responder a:

1. Un sistema que tiene solución es

☐ determinado ☐ compatible ☐ incompatible

2. Un sistema que no tiene solución es

☐ determinado ☐ compatible ☐ incompatible

3. Un sistema que con solución única es

☐ determinado ☐ indeterminado ☐ incompatible

Final del Test

Puntos: Correctas

Test. Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ 2x+2y & = & ? \end{array}\right\}$$

el valor de ? para que sea compatible indeterminado es

(a) cualquiera (b) 2 (c) 4

Ejercicio 3. Resolver por el método de Gauss el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y-3z & = & 2 \\ 3x+y+z & = & 3 \\ x+5y+7z & = & -1 \end{array}\right\}$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
SISTEMAS LINEALES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 4. Resolver por el método de Gauss el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcl} x+5y+2z & = & 8 \\ 3x-y-2z & = & 8 \\ 2x\quad -z & = & 6 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 5. Resolver por el método de Gauss el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y-z+t & = & 3 \\ z+2t & = & 3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 6. Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t = & 5 \\ 2x & - & y & + & z & + & 2t = & 11 \\ x & - & y & + & 2z & - & 2t = & 0 \\ x & + & 2y & & & + & 3t = & 8 \end{array}\right\}$$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-3\,f_1]{f_2-2\,f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3+4\,f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -29 & -31 \end{array}\right) \text{ Compatible Determinado}$$

De la tercera ecuación sacamos $\boxed{z = \dfrac{31}{29}}$.

De la segunda despejando $\boxed{y = \dfrac{43}{29}}$

y de la primera ecuación obtenemos $\boxed{x = \dfrac{13}{29}}$.

Ejercicio 1

Ejercicio 2.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 9 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2\,f_3-3\,f_1]{f_2+2\,f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -8 & -27 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{array}\right) \text{ Sistema Incompatible}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 7 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 10 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ Compatible Indeterminado}$$

La tercera ecuación es linealmente dependiente de las otras.
Elegimos como variable libre $z = \lambda$.
Despejamos en la 2ª ecuación $y = -\dfrac{3}{7} - \dfrac{10}{7}\lambda$ y luego despejamos x en la 1ª ecuación, obtenemos las infinitas soluciones en forma parametrizada:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{8}{7} + \dfrac{1}{7}\lambda \\ y & = & -\dfrac{3}{7} - \dfrac{10}{7}\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-2\,f_1]{f_2-3\,f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & -16 & -8 & -16 \\ 0 & -10 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{8\,f_3-5\,f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & -16 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ es compatible indeterminado}$$

La tercera ecuación es linealmente dependiente de las otras.
Elegimos como variable libre $z = \lambda$.
Despejando en la segunda ecuación $y = 1 - \dfrac{1}{2}\,\lambda$ y despejando x en la primera ecuación, obtenemos las infinitas soluciones en forma parametrizada son:

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 3 + \dfrac{1}{2}\,\lambda \\ y & = & 1 - \dfrac{1}{2}\,\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

Ejercicio 4

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \text{ es compatible indeterminado}$$

Elegimos como variables libres $t = \lambda$ y $x = \mu$.
Despejando en la 2ª ecuación $z = 3 - 2\,\lambda$ y despejando y en la 1ª ecuación, $y = 3 - 2\,\mu + 3 - 2\,\lambda - \lambda = 6 - 2\,\mu - 3\,\lambda$.
Quedando las infinitas soluciones en forma parametrizada como:

$$\left\{\begin{array}{ccr} x & = & \mu \\ y & = & 6 - 2\,\mu - 3\,\lambda \\ z & = & 3 - 2\,\lambda \\ t & = & \lambda \end{array}\right.$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6.

$$\begin{array}{r} \\ \color{red}{f_2-2f_1} \\ \color{red}{f_3-f_1} \\ \color{red}{f_4-f_1} \end{array}\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Hemos intercambiado la f_4 a la f_2 por comodidad para conseguir como pivote un 1. Reducimos con $\color{red}{f_3+3f_2}$ y $\color{red}{f_4+2f_2}$.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\color{red}{4f_4-f_3}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

El nuevo sistema triangular se resuelve por sustitución hacia atrás:

$$-2\,t = -6 \Rightarrow \boxed{t=3} \qquad \text{entrando en la } f_3$$

$$-4\,z + 6\,(3) = 10 \Rightarrow \boxed{z=2} \qquad \text{entrando en la } f_2$$

$$y - (2) + 2\,(3) = 3 \Rightarrow \boxed{y=-1} \qquad \text{entrando en la } f_1$$

$$x + (-1) + (2) + (3) = 5 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Ejercicio 6

Soluciones a los Tests

Solución al Test: El número buscado es 4, pues para que sea compatible indeterminado la segunda ecuación debe ser el doble de la primera.

Final del Test

Índice alfabético